STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1964-20r

Ueber eine Zerlegung des Haarschen Masseseauf kompakten Gruppen.

G. Helmberg.

Reprinted from:
Monatshefte fuer Mathematik, 68 (1964),
p 218-223.

1964.

Über eine Zerlegung des Haarschen Maßes auf kompakten Gruppen

Von

Gilbert Helmberg, Amsterdam

(Eingegangen am 3. Januar 1964)

Bei der Konstruktion von gleichverteilten Folgen in einer nichtkommutativen kompakten Gruppe X tritt die Frage auf, unter welchen Voraussetzungen sich das Haarsche Maß auf X als Faltungsprodukt der (auf ganz X erweiterten) Haarschen Maße von Untergruppen darstellen läßt (vgl. [6], Satz 1 und [4]). Ein einfaches Kriterium hierfür läßt sich aus dem Peter-Weyl'schen Satz innerhalb der Darstellungstheorie ableiten (s. [7]). In [4] und [5] werden hinreichende Bedingungen angegeben, die zum Teil auf dieses Kriterium zurückgehen, in ihren Formulierungen aber nicht mehr unmittelbar darauf Bezug nehmen. Diese Bedingungen sollen im folgenden zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen verschärft und durch einige weitere ergänzt werden, die unter dem Gesichtspunkt der Theorie der Gleichverteilung ebenfalls von Interesse sein können.

Es sei X eine kompakte Hausdorffsche Gruppe mit Einheitselement e, $\mathfrak{B}$ die σ-Algebra aller Borelmengen in X und $C(X)$ die Menge aller stetigen komplexwertigen Funktionen auf X. Ferner seien Y und Z zwei abgeschlossene Untergruppen von X. Mit μ, η und ζ bezeichnen wir beziehungsweise die normierten Haarschen Maße auf X, Y und Z, und mit η' und ζ' die durch

$$\left.\begin{aligned}\eta'(E) &= \eta(E \cap Y)\\ \zeta'(E) &= \zeta(E \cap Z)\end{aligned}\right\} \quad \text{für alle } E \in \mathfrak{B}$$

definierten normierten (und regulären) Maße auf X. Das Faltungsprodukt $\eta' * \zeta'$ ist definiert als jenes reguläre Maß auf X, für das

$$\int_X f(x)\, d(\eta' * \zeta')\,(x) = \int_X \int_X f(x_1\, x_2)\, d\eta'(x_1)\, d\zeta'(x_2) =$$
$$= \int_Z \int_Y f(yz)\, d\eta(y)\, d\zeta(z) \text{ für alle } f \varepsilon C(X)$$

gilt.

Es sei $\mathfrak{D} = \{D^{(\lambda)} : \lambda \varepsilon \Lambda\}$ ein vollständiges System nicht äuqivalenter irreduzibler unitärer stetiger Darstellungen von X. Mit $\mathfrak{D}' = \{D^{(\lambda)} : \lambda \varepsilon \Lambda'\}$ bezeichnen wir das durch Streichung der trivialen Darstellung erhaltene System. Die Darstellung $D^{(\lambda)}$ sei vom Grade n_λ und $E^{(\lambda)} = D^{(\lambda)}(e)$ (falls kein Mißverständnis möglich ist, lassen wir den Index λ künftig weg). Wir fassen $D(X) = \{D(x) : x \varepsilon X\}$ auf als Gruppe unitärer Transformationen eines n-dimensionalen unitären Raumes M (des zu D gehörigen Darstellungsmoduls).

Definition 1: Für $D \varepsilon \mathfrak{D}$ und $x \varepsilon X$ sei $F(x)$ der Unterraum aller zum Eigenwert 1 gehörigen Eigenvektoren der Transformation $D(x)$ in M. Ist X_1 eine Untergruppe von X, dann sei $F(X_1) = \bigcap_{x \varepsilon X_1} F(x)$.

Die Dimension von $F(x)$ ist die Vielfachheit des Eigenwertes 1 in $D(x)$. Die Dimension von $F(X_1)$ ist die Anzahl der in D enthaltenen trivialen Darstellungen von X_1. Die Untergruppe X_1 wird durch das System $\{F^{(\lambda)}(X_1) : \lambda \varepsilon \Lambda\}$ eindeutig bestimmt (s. [3] 5.).

Hilfssatz 1: Für jede Darstellung $D \varepsilon \mathfrak{D}$ ist die Transformation

$$P(Y) = \int_Y D(y)\, d\eta(y)$$

der Projektor auf $F(Y)$.

Beweis: Wir bezeichnen mit A^* die zur Matrix A adjungierte Matrix. Da die Darstellung D unitär ist, gilt

$$P^*(Y) = \int_Y D^*(y)\, d\eta(y) = \int_Y D(y^{-1})\, d\eta(y) = \int_Y D(y)\, d\eta(y) = P(Y),$$

$$P^2(Y) = \int_Y D(y_1)\, d\eta(y_1) \int_Y D(y_2)\, d\eta(y_2) = \int_Y \int_Y D(y_1\, y_2)\, d\eta(y_1)\, d\eta(y_2) =$$
$$= \int_Y \int_Y D(y_1)\, d\eta(y_1)\, d\eta(y_2) = \int_Y P(Y)\, d\eta(y_2) = P(Y).$$

Also ist $P(Y)$ ein Projektor auf einen Unterraum F_1. Ist $\mathfrak{f}$ ein Spaltenvektor, der einem Element aus $F(Y)$ entspricht, also $D(y)\,\mathfrak{f} = \mathfrak{f}$ für alle $y \varepsilon Y$, dann gilt

$$P(Y)\,\mathfrak{f} = \int_Y D(y)\,\mathfrak{f} d\eta(y) = \int_Y \mathfrak{f} d\eta(y) = \mathfrak{f},$$

woraus $F(Y) \subset F_1$ folgt. Stellen wir uns D so transformiert vor, daß D als Darstellung von Y in vollständig reduzierter Gestalt erscheint (dies läuft auf eine andere Basiswahl in M hinaus), dann sehen wir bei Beachtung der bekannten Relationen für die Koeffizienten irreduzibler Darstellungen, daß die Dimension von F_1 gleich der Anzahl der in D enthaltenen trivialen Darstellungen von Y, also gleich $dim\, F(Y)$ ist. Es gilt also $F_1 = F(Y)$.

Die besprochene Transformation von D kann man übrigens auch verwenden, um die anderen angeführten Eigenschaften des Operators $P(Y)$ abzuleiten; nur muß man dann überlegen, daß diese Transformation mittels einer unitären Matrix durchgeführt werden kann.

Im folgenden bezeichnen wir den Rang eines Operators A (= Dimension seines Bildraumes, = n-Dimension seines Nullraumes) mit rA.

Hilfssatz 2: Es seien N_1, N_2 Unterräume von M und P_1, P_2 die zugehörigen Projektoren. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) $N_1 \perp N_2$
2) $P_1 P_2 = 0$
3) $P_2 P_1 = 0$
4) $P_1 + P_2$ *ist ein Projektor*
5) $r(E - P_1)(E - P_2) = n - rP_1 - rP_2$
6) $r(E - P_2)(E - P_1) = n - rP_1 - rP_2$
7) $r(E - P_1 - P_2) = n - rP_1 - rP_2$
8) $r(E - P_1 - P_2) = r(E - P_1)(E - P_2)$
9) $r(E - P_1 - P_2) = r(E - P_2)(E - P_1)$.

Beweis: Aus Symmetriegründen genügt es, die Äquivalenzen 1) <=> 2) <=> 4) <=> 5) <=> 7) <=> 8) zu beweisen, von denen wieder 1) <=> 2) <=> 4), aus [2] § 27 Theorem 4 und § 28 Theorem 2 entnommen werden können. Der Operator $P_i^{\perp} = E - P_i$ ist der Projektor auf das orthogonale Komplement $N_i^{\perp}$ von $N_i (i = 1, 2)$:

1) <=> 5): Nach dem Isomorphiesatz gilt

$$N_1 + N_2^{\perp}/N_1 \cong N_2^{\perp}/_{N_1 \cap N_2^{\perp}},$$

also

$$rP_1^{\perp} P_2^{\perp} = dim\, N_2^{\perp} - dim(N_1 \cap N_2^{\perp}) = n - dim\, N_2 - dim(N_1 \cap N_2^{\perp}). \quad (1)$$

Der letzte Ausdruck ist genau dann gleich $n - dim\, N_2 - dim\, N_1$, wenn $N_1 = N_1 \cap N_2^{\perp}$, also $N_1 \subset N_2^{\perp}$ gilt.

1) <=> 7): Der Nullraum des Operators $E - P_1 - P_2$ ist

$$\begin{aligned}\{v \varepsilon M : (E - P_1 - P_2) v = 0\} &= \{v \varepsilon M : P_1^{\perp} v = P_2 v\} \\ &= \{v \varepsilon M : P_1 v = P_2^{\perp} v\} \\ &= \{v_1 + v_2 : v_1 \varepsilon N_1 \cap N_2^{\perp}, v_2 \varepsilon N_1^{\perp} \cap N_2\} \\ &= (N_1 \cap N_2^{\perp}) + (N_1^{\perp} \cap N_2).\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$r(E - P_1 - P_2) = n - dim(N_1 \cap N_2^{\perp}) - dim(N_1^{\perp} \cap N_2). \tag{2}$$

Der letzte Ausdruck ist dann und nur dann gleich $n - rP_1 - rP_2 = n - dim\, N_1 - dim\, N_2$, wenn $N_1 = N_1 \cap N_2^{\perp}$ und $N_2 = N_2 \cap N_1^{\perp}$, also $N_1 \perp N_2$ gilt.

1) <=> 8): Aus (1) und (2) folgt, daß $r(E - P_1 - P_2) = rP_1^{\perp} P_2^{\perp}$ genau dann gilt, wenn $\dim(N_1^{\perp} \cap N_2) = dim\, N_2$, also $N_2 \subset N_1^{\perp}$ gilt.

Wir wenden beide Hilfssätze nun auf unsere besondere Fragestellung an.

Satz 1. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1) $\mu = \eta' * \zeta'$
2) $\mu = \zeta' * \eta'$
3) $\eta' * \zeta' = \zeta' * \eta'$ *und* $YZ (= ZY) = X$
4) $F^{(\lambda)}(Y) \perp F^{(\lambda)}(Z)$ *für alle* $\lambda \varepsilon \Lambda'$
5) $P^{(\lambda)}(Y)\, P^{(\lambda)}(Z) = 0$ *für alle* $\lambda \varepsilon \Lambda'$
6) $P^{(\lambda)}(Z)\, P^{(\lambda)}(Y) = 0$ *für alle* $\lambda \varepsilon \Lambda'$
7) $P^{(\lambda)}(Y) + P^{(\lambda)}(Z) = \int\limits_X D^{(\lambda)}(x)\, d(\eta' + \zeta')(x)$ *ist idempotent für alle* $\lambda \varepsilon \Lambda'$
8) $r(E^{(\lambda)} - P^{(\lambda)}(Y))\,(E^{(\lambda)} - P^{(\lambda)}(Z)) = n_\lambda - rP^{(\lambda)}(Y) - rP^{(\lambda)}(Z)$ *für alle* $\lambda \varepsilon \Lambda'$
9) $r(E^{(\lambda)} - P^{(\lambda)}(Z))\,(E^{(\lambda)} - P^{(\lambda)}(Y)) = n_\lambda - rP^{(\lambda)}(Y) - rP^{(\lambda)}(Z)$ *für alle* $\lambda \varepsilon \Lambda'$
10) $r(E^{(\lambda)} - P^{(\lambda)}(Y) - P^{(\lambda)}(Z)) = n_\lambda - rP^{(\lambda)}(Y) - rP^{(\lambda)}(Z)$ *für alle* $\lambda \varepsilon \Lambda'$
11) $r(E^{(\lambda)} - P^{(\lambda)}(Y) - P^{(\lambda)}(Z)) = r(E^{(\lambda)} - P^{(\lambda)}(Y))\,(E^{(\lambda)} - P^{(\lambda)}(Z))$ *für alle* $\lambda \varepsilon \Lambda'$
12) $r(E^{(\lambda)} - P^{(\lambda)}(Y) - P^{(\lambda)}(Z)) = r(E^{(\lambda)} - P^{(\lambda)}(Z))\,(E^{(\lambda)} - P^{(\lambda)}(Y))$ *für alle* $\lambda \varepsilon \Lambda'$.

Beweis: Aus Symmetriegründen genügt es wieder, die Äquivalenzen 1) <=> 3) <=> 4) <=> 5) <=> 7) <=> 8) <=> 10) <=> 11) zu betrachten. Die

Äquivalenz 1) $\Longleftrightarrow$ 5) folgt als Sonderfall aus [7] Theorem 1, 2 (s. auch [5] Satz 2). Die Äquivalenzen 4) $\Longleftrightarrow$ 5) $\Longleftrightarrow$ 7) $\Longleftrightarrow$ 8) $\Longleftrightarrow$ 10) $\Longleftrightarrow$ 11) folgen aus den Hilfssätzen 1 und 2. Aus 3) folgt 1) nach [5] Korollar 5. 1, umgekehrt ist 1) äquivalent mit 2) und aus beiden zusammen folgt 3).

Für die Konstruktion gleichverteilter Folgen in X ist der Fall von besonderem Interesse, in dem die Untergruppen Y und Z monothetisch sind, d. h. durch jeweils ein einziges Element a bzw. b erzeugt werden. In diesem Falle lassen sich notwendige und hinreichende Bedingungen für die Gültigkeit der Aussagen 1) bzw. 2) bereits mit Hilfe der Transformation $D(a)$ und $D(b)$ formulieren:

Satz 2. Es seien Y bzw Z die durch die Elemente a bzw. b erzeugten Untergruppen von X. Dann ist jede der Aussagen 1) — 12) in Satz 1 äquivalent mit jeder der folgenden Aussagen:

13) $F^{(\lambda)}(a) \perp F^{(\lambda)}(b)$ *für alle* $\lambda \varepsilon \Lambda'$.

14) $r(E^{(\lambda)} - D^{(\lambda)}(a))\,(E^{(\lambda)} - D^{(\lambda)}(b)) = r(E^{(\lambda)} - D^{(\lambda)}(a)) + r(E^{(\lambda)} - D^{(\lambda)}(b)) - n_\lambda$ *für alle* $\lambda \varepsilon \Lambda'$.

15) $r(E^{(\lambda)} - D^{(\lambda)}(b))\,(E^{(\lambda)} - D^{(\lambda)}(a)) = r(E^{(\lambda)} - D^{(\lambda)}(a)) + r(E^{(\lambda)} - D^{(\lambda)}(b)) - n_\lambda$ *für alle* $\lambda \varepsilon \Lambda'$.

Beweis. Es genügt wieder die Äquivalenzen 4) $\Longleftrightarrow$ 13) $\Longleftrightarrow$ 14) zu betrachten. Die Äquivalenz 4) $\Longleftrightarrow$ 13) folgt aus den Beziehungen $F^{(\lambda)}(Y) = F^{(\lambda)}(a)$ und $F^{(\lambda)}(Z) = F^{(\lambda)}(b)$ für alle $\lambda \varepsilon \Lambda$ (s. [3] 5. und Lemma 2). Wir beweisen noch die Äquivalenz 13) $\Longleftrightarrow$ 14).

Der Operator $D(b)$ läßt $F(b)$ elementweise und $F(b)^\perp$ als ganzes invariant. Der Operator $(E - D(b))$ hat also den Nullraum $F(b)$ und den Bildraum $F(b)^\perp$. Analoges gilt für den Operator $(E - D(a))$. Nach dem Isomophiesatz gilt wieder

$$F(a) + F(b)^\perp/F(a) \cong F(b)^\perp/F(a) \cap F(b)^\perp,$$

also $r(E - D(a))\,(E - D(b)) = r(E - D(b)) - dim(F(a) \cap F(b)^\perp)$. Nun ist $n - r(E - D(a)) = n - dim\, F(a)^\perp = dim\, F(a)$ und diese Zahl ist genau dann gleich $\dim(F(a) \cap F(b)^\perp)$, wenn $F(a) \subset F(b)^\perp$, d. h. $F(a) \perp F(b)$ gilt.

Setzen wir speziell $b = e$, dann erhalten wir die bekannte Aussage, daß das Element a genau dann die ganze Gruppe X erzeugt, wenn $r(E^{(\lambda)} - D^{(\lambda)}(a)) = n_\lambda$, d. h. det $(E^{(\lambda)} - D^{(\lambda)}(a)) \neq 0$ für alle $\lambda \varepsilon \Lambda'$ gilt [1].

Literatur

[1] *B. Eckmann*: Über monothetische Gruppen. Commentarii math. Helvet. **16**, 249–263 (1943/44).

[2] *P. R. Halmos*: Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity. Chelsea Publishing Company, New York 1957.

[3] *G. Helmberg*: Generating sets of elements in compact groups. Pacific J. Math. **9**, 1083–1096 (1959).

[4] *G. Helmberg*: Ein Satz über Gleichverteilung in kompakten Gruppen II. Monatshefte f. Math. **63**, 368–377 (1959).

[5] *G. Helmberg*: Zerlegungen des Mittelwertes fastperiodischer Funktionen I. J. reine u. angew. Math. **207**, 31–52 (1961).

[6] *G. Helmberg*: Eine Familie von Gleichverteilungskriterien in kompakten Gruppen. Monatshefte f. Math. **66**, 417–423 (1962).

[7] *Y. Kawada* and *K. Itô*: On the probability distributions on a compact group I. Proc. Phys. — Math. Soc. Japan (Ser. 3) **22**, 977–998 (1940).